IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **10.7.2013**

Übung Nr. 12
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 12.1: Spektrum der Differenzenmatrizen Wir betrachten nun die einzelnen Anteile der Systemmatrix für die RWA

$$\begin{aligned} -pu''(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) &= f(t), \qquad t \in (a,b) \\ u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}$$

mit $p = 1$ und $q(t) = 1$.

Das Intervall $[0,1]$ sei dazu in $n+1$ Teilintervalle geteilt und es gelte $t_k = hk$ mit $h = \frac{1}{n+1}$ und $k = 1, \dots, n+1$. Verifizieren Sie die folgenden (z. T. trivialen) Aussagen:

(a) Die „Diffusionsmatrix", die aus der Diskretisierung von $-u''$ mit dem Differenzenoperator 2. Ordnung Δ_h^2 resultiert hat die n Eigenpaare

$$\lambda_k = \frac{2}{h^2}\big(1 - \cos(kh\pi)\big), \qquad w^{(k)} = \begin{pmatrix} \sin(kh\pi) \\ \vdots \\ \sin(ikh\pi) \\ \vdots \\ \sin(nkh\pi) \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \dots, n$$

(b) Die „Advektionsmatrix" zur Diskretisierung von u' mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten Δ_h^- hat den einzigen Eigenwert $\lambda = \frac{1}{h}$ mit dem einzigen Eigenvektor $w = (0, \dots, 0, 1)^T$.

(c) Die „Massenmatrix" zur Diskretisierung des Operators $r(t)u$ mit einer stetigen Funktion r hat die Eigenpaare

$$\lambda_k = r(t_k), \qquad w^{(k)} = e_k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 12.2: Numerische Diffusion Wir diskretisieren die RWA

$$u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = 1, \qquad u(1) = 0,$$

mit Hilfe des Rückwärtsdifferenzenoperators auf einer Unterteilung der Schrittweite $h = \frac{1}{n+1}$ wie in der vorigen Aufgabe.

(a) Zeigen Sie durch Taylorentwicklung, dass der Konsistenzfehler von der Ordnung eins in h ist.

(b) Zeigen Sie ebenso, dass diese Diskretisierung konsistent von Ordnung zwei ist, wenn sie auf die Gleichung

$$-\frac{h}{2}u''(t) + u'(t) + r(t)u(t) = f(t)$$

angewandt wird, dass also die Diskretisierung eine Gleichung mit künstlicher Diffusion mit Diffusionskoeffizient $h/2$ löst.

(c) Ein Kollege behauptet, er könne mit Rückwärtsdifferenzen auf Unterteilungen der Schrittweite $h = 1/100$ Advektions-Diffusionsaufgaben mit Diffusionsparameter $\epsilon = 10^{-6}$ lösen. Was halten Sie von dieser Aussage?

Aufgabe 12.3: Finite-Elemente-Matrizen Das Intervall $[a, b]$ sei in n Teilintervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ unterteilt. Auf dem Teilintervall I_k finden wir die beiden linearen Ansatzfunktionen

$$\varphi_{k-1}(t) = \frac{t_k - t}{h}, \qquad \varphi_k(t) = \frac{t - t_{k-1}}{h}.$$

(a) Berechnen Sie die "lokale Steifigkeitsmatrix" A_k ausgehenden von $(n+1) \times (n+1)$ Nullmatrizen in denen die Einträgen

$$(A_k)_{i,j} = \int_{I_k} \varphi_i'(t)\varphi_j'(t)\, dt$$

für $i, j \in \{k-1, k\}$ gesetzt werden.

(b) Bauen Sie für den konkreten Fall $n = 5$ die gesamte Steifigkeitsmatrix $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$ auf.