IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **3.7.2013**

Übung Nr. 11
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 11.1: Führen Sie einige Schritte des Schießverfahrens für die RWA

$$u'' = -g, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

durch, indem Sie mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = s = 0$ starten. Wählen Sie eine Iteration Ihrer Wahl, z.B. das Bisektionsverfahren (hier brauchen Sie einen zweiten Wert für s, den Sie geeignet wählen müssen).

Aufgabe 11.2: Zu lösen sei die d-dimensionale lineare RWA 1. Ordnung

$$u'(t) = A(t)u(t) + g(t), \quad t \in [a.b], \quad \text{mit} \quad B_a u(a) + B_b u(b) = \gamma$$

(a) mit einem Differenzenverfahren, in dem Sie u' durch den Rückwärtsdifferenzenoperator

$$\Delta_h^- y_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$$

ersetzen.

(b) ... einem Einfachschießverfahren, wobei das explizite Eulerverfahren als Löser der auftretenden AWA genutzt werden soll.

Aufgabe: Vergleichen Sie den jeweiligen numerischen Aufwand für die oben genannten Lösunsgprozeduren. Also die Anzahl der Auswertungen $A(t)$ und $g(t)$ sowie den Aufwand zur Lösung der auftretenden Gleichungssysteme. Um einen fairen Vergleich zu erhalten muss die Gitterweite h in beiden Verfahren gleich gewählt werden.

Aufgabe 11.3: Die RWA

$$\begin{aligned} -pu''(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) &= f(t), \qquad t \in (a,b) \\ u(a) &= \alpha \\ u(b) &= \beta \end{aligned}$$

werde mit folgenden in der Vorlesung definierten Differenzenoperatoren approximiert:

$$u''(t_k) \approx \Delta_h^2 u_k \qquad q_k u'(t_k) \approx \begin{cases} \Delta_h^- u_k & \text{falls } q_k \geq 0 \\ \Delta_h^+ u_k & \text{falls } q_k \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass unter der Bedingung, dass $r(t) \geq 0$ für alle t, die resultierende Matrix immer irreduzibel diagonaldominant ist.

Hinweis: Die Definition finden Sie auf Wikipedia unter dem Eintrag "Diagonaldominante Matrix". Zur Irreduzibilität ist die Definition im Skript auf Seite 218 einfacher nachzuprüfen.

Jede Aufgabe 5 Punkte.