

**Übung Nr. 10**  
**zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013**

**Aufgabe 10.1:** Wir haben folgende DAE vorliegen

$$\begin{aligned}u'(t) &= -0.9u(t) + 4v(t) + 4w(t) + 4, \\v'(t) &= -0.4u(t) + 0.05v(t) + 100w(t) + 0.8, \\0 &= 20000u(t) + 4000v(t) - 40000w(t) + 8,\end{aligned}$$

auf dem Zeitintervall  $I = [0, 0.2]$  mit  $u(0) = -2$  und  $v(0) = 10$ .

- (a) Geben Sie den Index der DAE an, indem Sie die DAE durch Differentiation der algebraischen Bedingung in eine AWA überführen.
- (b) Bestimmen Sie einen adequaten Startwert  $w(0)$  für die entstehende AWA.
- (c) Geben Sie die Vorschrift eines impliziten Euler-Schritts für die DAE und für die umgeformte AWA an!
- (d) *Ohne Punkte - Diskussion:* Rekapitulieren Sie den Begriff Steifheit! Würden Sie die obige DAE als steif bezeichnen? Begründen Sie ihre Aussage entweder durch analytische Argumente oder numerische Rechnungen!

**Aufgabe 10.2:** Die lineare DGL  $u'' + u = 1$  hat Lösungen der Form

$$u(t) = a \sin(t) + b \cos(t) + 1.$$

Zu dieser Gleichung betrachten wir die folgenden Sätze von Randbedingungen:

$$u(0) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{10.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0 \tag{10.2}$$

$$u(0) = 1, \quad u(\pi) = 1 \tag{10.3}$$

- (a) Zeigen Sie, dass es zur Randbedingung (10.1) genau eine, zu (10.2) keine und zu (10.3) unendlich viele Lösungen gibt.
- (b) Überführen Sie die DGL in ein System erster Ordnung und vergleichen Sie das Ergebnis aus dem ersten Aufgabenteil mit dem Lösbarkeitskriterium aus Vorlesung/Skript.

**Aufgabe 10.3:** Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie für die AWA  $u(0) = v(0) = 0$  die Ableitung des Funktionswertes  $u(1)$  nach Änderungen der Startwerte.
- (b) Berechnen Sie für die RWA  $u(0) = u(2) = 0$  die Ableitung des Funktionswertes  $u(1)$  nach Änderungen der Startwerte.
- (c) Vergleichen Sie das asymptotische Verhalten für  $\alpha \rightarrow \infty$ . Welche Aufgabe ist besser konditioniert?