IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **12.6.2013**

Übung Nr. 8
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 8.1: Man bestimme das Stabilitätsintervall der expliziten Mittelpunktsregel

$$u_k - u_{k-2} = 2hf_{k-1},$$

und der folgenden expliziten Mehrschrittformel:

$$u_k - u_{k-2} = \frac{1}{2}h\left(f_{k-1} + 3f_{n-2}\right).$$

Aufgabe 8.2: Wir haben die folgende lineare Mehrschrittmethode vorliegen

$$u_k + \alpha\left(u_{k-1} - u_{k-2}\right) - u_{k-3} = \frac{1}{2}\left(3+\alpha\right)h\left(f_{k-1} + f_{k-2}\right).$$

Dabei ist α ein beliebiger Parameter aus $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Methode nullstabil ist für $\alpha \in (-3, 1)$!

(b) Welche Konsistenzordnung besitzt das Verfahren für $\alpha \in (-3, 1)$? Ist eine höhere Konsistenzordnung überhaupt möglich?

Aufgabe 8.3: Zu lösen sei die AWA $u' = f(t, u)$ mit $u(0) = u_0$ mit einer LMM. Sie benutzen das Verfahren

$$u_k + 4u_{k-1} - 5u_{k-2} = h(2f_k + f_{k-1}).$$

Wir nehmen ganz Abstrakt an, dass das Verfahren so geartet ist, dass bei Startwerten u_0 und u_1 und Schrittweite $h = 1/n$ gilt $u_n = u(1)$, das Verfahren also die exakte Lösung der Gleichung am Punkt $t = 1$ reproduziert.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$u_k = a(-5)^k + b, \qquad \begin{array}{rl} a &= \frac{1}{6}(\epsilon_0 - \epsilon_1) \\ b &= \frac{1}{6}(5\epsilon_0 + \epsilon_1) \end{array}, \quad \text{für } k \geq 0$$

die Rekursion $u_k + 4u_{k-1} - 5u_{k-2} = 0$ mit Startwerten $u_0 = \epsilon_0$, $u_1 = \epsilon_1$ und der rechten Seite $f(t, u) \equiv 0$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass eine Störung der Startwerte u_0 und u_1 um ϵ_0 und ϵ_1 in der Regel dazu führt, dass für $h \to 0$ die Lösung der gestörten Gleichung nicht mehr gegen $u(1)$ konvergiert.

Jede Aufgabe 5 Punkte.