IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **5.6.2013**

Übung Nr. 6
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 6.1: (Das θ-Verfahren) Mit einem gewählten Wert $\theta \in [0,1]$ ist das θ-Verfahren definiert durch

$$y_1 = y_0 + h\big((1-\theta)f(t_0,y_0) + \theta f(t_0+h, y_1)\big). \tag{6.1}$$

(a) Welche bekannten Verfahren ergeben sich für $\theta = 0$, $\theta = 1$ und $\theta = 1/2$?

(b) Geben Sie die Stabilitätsfunktion $R(z)$ für allgemeines θ an.

(c) Zeigen Sie, dass das Stabilitätsgebiet für $\theta = 1/2$ genau die linke Halbebene ist.

Aufgabe 6.2: (Energieerhaltung und A-Stabilität) Wenden Sie das θ-Verfahren aus Aufgabe 6.1 auf den harmonischen Oszillator

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

an und betrachten Sie die Energie $E(u) = \|u\|_2^2$.

(a) Zeigen Sie, dass für Lösungen der Differentialgleichung mit beliebigen Startwerten Energieerhaltung gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $\theta = 1/2$ und beliebige Startwerte, sowie beliebiges h, Energieerhaltung gilt, also $E(y_{n+1}) = E(u_0)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Energie für $\theta < 1/2$ ansteigt und für $\theta > 1/2$ fällt, wenn h hinreichend klein ist.

Hinweis: Im Diskreten überlegen Sie sich, wie sich die Norm eines Vektors ändert, wenn er mit einem Vielfachen einer orthogonalen Matrix multipliziert wird.

Aufgabe 6.3: (Stabilitätsfunktionen) Aus der Vorlesung kennen Sie folgende zwei Formeln zur Berechnung der Stabilitätsfunktion eines Verfahrens:

$$R(z) = 1 + zc^T(I - zB)^{-1}\mathbf{1} = \frac{\det(I - zB + z\mathbf{1}c^T)}{\det(I - zB)}.$$

Hier ist

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}c^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_r \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_r \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktionen der folgenden Verfahren und geben Sie die Stabilitätsintervalle (nicht die kompletten Stabilitätsgebiete) $\big\{x \in \mathbb{R} \big| \, |R(x)| \le 1\big\}$ an.

(a) das modifizierte Eulerverfahren

(b) die SDIRK-Verfahren mit $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ und $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Jede Aufgabe 5 Punkte.