IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat Abgabe: **22.5.2013**

Übung Nr. 5
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 5.1: (Asymptotische Stabilität I) Gegeben sei die AWA $u' = -u$ mit $u(0) = u_0$.

(a) Führen Sie 4 Schritte mit dem Eulerverfahren mit Schrittweite 4 durch.

(b) Führen Sie 2 Schritte mit dem Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 mit Schrittweite 4 durch.

(c) Vergleichen Sie graphisch das Verhalten der Zeitschrittverfahren mit dem der Lösung.

Hinweis: Sie dürfen für die Berechnungen Ihre Programme aus der Programmierübung benutzen. In diesem Fall führen Sie bitte 4 RK-Schritte durch.

Aufgabe 5.2: (Stabilität der Runge-Kutta-Verfahren) Gegeben sei die Differentialgleichung $u' = f(t, u)$, wobei f Lipschitz-stetig bzgl. u mit Konstante L sei. Zeigen Sie, dass für jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren der Stufe r die Lipschitzbedingung (2.2.26) aus dem Skript (S. 52) mit einer geeigneten Lipschitz-Konstanten (jetzt Λ genannt) gilt.

Aufgabe 5.3: (Konvergenzordnung der Zwischenschritte) In einem r-stufigen RKV schreiben wir die Zwischenschritte des ersten Zeitschritts von t_0 auf $t_1 = t_0 + h$ als

$$y_{0,i} = y_0 + h \sum_{j=1}^{r} b_{ij} k_j, \quad k_i = f(t_0 + a_i h, y_{0,i}), \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Es gelte für $q = 1, \ldots, \tilde{p}$ die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{r} b_{ij} a_j^{q-1} = \frac{a_i^q}{q}. \tag{5.1}$$

(a) Zeigen Sie, dass (5.1) bedeutet, das die Quadraturformel $Q_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\varphi(a_j)$ das Integral $\int_0^{a_i} \varphi(t)\,dt$ exakt für alle Polynome $\varphi \in \mathcal{P}_{\tilde{p}-1}$ auswertet.

(b) Zeigen Sie durch Taylorentwicklung, dass (5.1) impliziert, dass

$$u(t_0 + a_i h) - y_{0,i} = \mathcal{O}(h^{\tilde{p}+1})$$

gilt.

Aufgabe 5.4: (Kollokationsverfahren) Zeigen Sie, dass ein Kollokationsverfahren mit paarweise verschiedenen Stützpunkten a_j einem RKV mit den Koeffizienten

$$b_{ij} = \int_0^{a_i} L_j(t)\,dt, \qquad c_j = \int_0^1 L_j(t)\,dt$$

entspricht. Hierbei sind die a_j definiert wie in der Vorlesung und L_j sei das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$L_j = \prod_{k \neq j} \frac{t - a_k}{a_j = a_k}.$$

Jede Aufgabe 4 Punkte.