IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **15.5.2013**

Übung Nr. 4
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 4.1: (Konvergenzraten-Raten) Sie lösen eine AWA mit einem Einzelschrittverfahren jeweils bis zum Zeitpunkt T mit Schrittweiten $h_k = 2^{-k}$ und erhalten Lösungen y_{h_k}. Da Sie die exakte Lösung des Problems nicht kennen, messen Sie die Differenz $\eta_k = \|y_{h_k} - y_{h_{k-1}}\|$. Sie bekommen für verschiedene Verfahren die Ergebnisse in der folgenden Tabelle. Entscheiden Sie begründet, für welche der folgenden Ergebnisfolgen Sie auf Konvergenz schließen können und geben Sie in diesem Fall die Konvergenzordnung an.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Verfahren 1	4.32	1.08	0.270	0.0675	0.0168	4.22e-3	1.05e-3	2.63e-4
Verfahren 2	14.1	12.5	11.5	10.7	10.1	9.55	9.10	8.76
Verfahren 3	17.3	4.32	1.92	1.08	0.692	0.480	0.353	0.270
Verfahren 4	37.8	18.4	8.99	4.38	2.14	1.04	0.509	0.248

Aufgabe 4.2: (Implizite diskrete Stabilität) Zeigen Sie, dass der diskrete Stabilitätssatz ohne Schrittweitenbedingung gilt, wenn ein implizites Verfahren die Struktur

$$y_k + h_k G(h_k; t_k, y_k) = y_{k-1} + h_k F(h_k; t_{k-1}, y_{k-1})$$

mit Lipschitz-stetigem G und der Zusatzbedingung $\forall x \in \mathbb{R}^d : (Gx, x) \geq 0$ hat (alle anderen Voraussetzungen des Satzes bleiben bestehen).

Aufgabe 4.3: (Autonomisierung) Die AWA $u' = f(t, u)$ und $u(t_0) = u_0$ kann durch die Wahl

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ t \end{pmatrix}, \qquad F(U(t)) = \begin{pmatrix} f(t, u(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

in eine autonome AWA umgewandelt werden. Ein Runge-Kutta-Verfahren, das für die ursprüngliche und die autonomisierte AWA dasselbe Ergebnis liefert, heißt invariant unter Autonomisierung. Zeigen Sie:

(a) Die beiden AWA sind äquivalent.

(b) Es genügt Probleme zu betrachten, für die $t_0 = 0$ gilt.

(c) Ein autonom invariantes Runge-Kutta-Verfahren erfüllt für jede Stufe r die Bedingung

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}.$$

Aufgabe 4.4: (Ordnungsanalyse für Runge-Kutta-Verfahren)

(a) Zeigen Sie durch Taylorentwicklung von $f(t, u)$ um (t_0, u_0) und Entwicklung von y_1 nach Potenzen von h und ggf. Taylorentwicklung für die Zwischenwerte analog zur Vorlesung, dass das Kuttasche Verfahren 3. Ordnung (Seite 51 im Skript) in der Tat mindestens die Konsistenzordnung 3 hat.

Hinweis: Sparen Sie sich Arbeit, indem Sie nur autonome Probleme betrachten. Nach Aufgabe 4.3 ist dies sogar hinreichend für den allgemeinen Fall.

(b) Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren, wenn Sie es auf eine Gleichung der Form $u' = f(t)$ anwenden? Betrachten Sie dazu die Integralgleichung.

Bemerkung: In beiden Aufgabenteilen nehmen wir an, dass alle benötigten Ableitungen existieren und stetig sind.

Jede Aufgabe 4 Punkte.