IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **8.5.2013**

Übung Nr. 3
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 3.1: (Fehlerabschätzung für das Polygonzugverfahren) Das Intervall $I = [0, T]$ sei aufgeteilt in n Teilintervalle der Schrittweite $h = T/n$. Ferner sei die rechte Seite $f(t, u)$ in der Differentialgleichung $u' = f(t, u)$ differenzierbar und Lipschitz-stetig in beiden Argumenten auf $I \times \mathbb{R}$ mit der Konstanten L. Benutzen Sie den lokalen Stabilitätssatz 1.4 um zu zeigen, dass die Lösungen der Polygonzugmethode und der AWA mit gemeinsamem Startwert $u(0) = u_0$ der Fehlerabschätzung

$$|u(t) - u_h(t)| \le Che^{Lt}$$

mit einer Konstanten C unabhängig von h und t genügt.

Hinweis: Konstruieren Sie auf jedem Intervall eine Differentialgleichung, die u_h erfüllt, wobei Sie benutzen dürfen, dass die Werte in den Intervallendpunkten $u_h(t_k)$ schon im Verfahren berechnet wurden.

Aufgabe 3.2: (Integrierende Faktoren) Finden Sie eine explizite Darstellung für Lösungen der linearen Diffentialgleichung

$$u' = a(t)u + b(t)$$

in der Form $u(t) = ...$, wobei rechts des Gleichheitszeichens nur Integrale stehen, die kein u enthalten.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung mit dem “integrierenden Faktor”

$$m(t) = \exp\left(-\int a(s)\,ds\right).$$

Aufgabe 3.3: (Differentielle Stabilität) Betrachten Sie die AWA aus der Vorlesung

$$u' = -u^2 \quad u(-1) = u_0 = -1$$

auf dem Intervall $[-1, 0[$. Geben Sie die Funktion $D_{u_0}u(t)$ an.

Aufgabe 3.4: Feiern Sie in den Mai (mit kurzem Beweis) für vier Punkte!

Jede Aufgabe 4 Punkte.