IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **3.5.2013**

Übung Nr. 2
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 2.1: (Konvergenz bei eindeutiger Lösung) Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes von Peano sei $u(t)$ die eindeutige Lösung einer AWA. Zeigen Sie, dass dann das Eulerverfahren für jede Folge $h \to 0$ gegen $u(t)$ konvergiert.

Bemerkung: Dies ist eine fundamentale Eigenschaft von Häufungspunkten von Folgen, die zusätzliche Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 2.2: (Zinseszins) Sie legen Kapital von 1 Euro zum jährlichen Zinssatz von 100% (Aufgaben müssen nicht realitätsnah sein) an. Die Zinsen werden jeweils zu Anfang (s. letzte Klammer) der unten beschriebenen Zeitintervalle dem Konto gutgeschrieben und danach mitverzinst.

(a) Berechnen Sie das Kapital nach einem Jahr bei (i) jährlicher und (ii) vierteljährlicher Zinsgutschrift.

(b) Zeichnen Sie die Lösungen, indem Sie die berechneten Punkte linear interpolieren.

(c) Wogegen konvergiert diese Verzinsungregel, wenn die Länge der Zinsintervalle gegen 0 konvergiert, also Zinsen immer häufiger während des Jahres gutgeschrieben werden?

Aufgabe 2.3: (Globale Existenz und Eindeutigkeit) Für die Funktion $f(y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ gelte mit einer positiven Konstanten L die globale Lipschitz-Bedingung

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Die Funktion $u(t)$ löse die Gleichung $u' = f(u)$ mit $u(0) = u_0$. Zeigen Sie:

(a) $u(t)$ ist eindeutig und der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

(b) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|u(t)| \le e^{Lt}|u_0|$$

Aufgabe 2.4: (Banachscher Fixpunktsatz in Banachräumen) Ein Banachraum $\mathcal{B}$ ist definiert als ein vollständiger Vektorraum, das heißt, ein unter Umständen unendlichdimensionaler Vektorraum in dem jede Cauchy-Folge gegen ein Element des Raumes selbst konvergiert.

Zeigen Sie, dass der Banachsche Fixpunktsatz für eine Kontraktion $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ohne weitere Annahmen wie Beschränktheit, Endlichdimensionalität oder Kompaktheit gilt, also jede Kontraktion auf einem Banachraum genau einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Sie dürfen den Beweis aus der „Numerik 0“ benutzen, wenn Sie sich der Zulässigkeit der einzelnen Schritte vergewissern. Schlagen Sie ggf. die Begriffe in der Aufgabenstellung nach.

Jede Aufgabe 4 Punkte.