IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **24.4.2013**

Übung Nr. 1
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 1.1: (Zweikörperproblem) Das klassische Zweikörperproblem (siehe auch Wikipedia unter diesem Stichwort) beschreibt die Bewegung zweier (konstanter) Massen m_1 und m_2 an den Positionen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ im Raum unter ihrer wechselseitigen Anziehung. Die Bewegungsgleichungen sind mit der Gravitationskonstanten G:

$$\mathbf{x}_1'' = Gm_2\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}, \quad \mathbf{x}_2'' = Gm_1\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}. \tag{1.1}$$

(a) Zeigen Sie nur mithilfe dieser Gleichungen, dass der Gesamtimpuls $P = m_1\mathbf{x}_1' + m_2\mathbf{x}_2'$ zeitlich konstant ist.

(b) Zeigen Sie, dass Energieerhaltung gilt für die Energie

$$E(t) = T(t) + U(t) = \frac{m_1|\mathbf{x}_1'|^2 + m_2|\mathbf{x}_2'|^2}{2} - G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}.$$

Aufgabe 1.2: (n-Körperproblem)

(a) Leiten Sie aus dem Superpositionsgesetz für Kräfte ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung analog zum System (1.1) her.

(b) Formen Sie dieses System um in ein System erster Ordnung.

Aufgabe 1.3: (Potenzreihen von Matrizen) Eine Funktion $f(z)$ sei definiert durch ihre (auf $\mathbb{C}$ konvergente) Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Die $n \times n$-Matrix A sei diagonalisierbar, so dass mit der Diagonalmatrix der Eigenwerte $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und einer regulären Matrix B gilt: $A = B\Lambda B^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(A)$ wohldefiniert ist durch

$$f(A) = B\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Aufgabe 1.4: (Lineare Systeme I) Gegeben Sei folgende AWA für eine vektorwertige Funktion $y : [0, T] \to \mathbb{C}^n$:

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0,$$

mit einer diagonalisierbaren Matrix A. Zeigen Sie, dass $y(t) = \exp(At)y_0$ Lösung der AWA ist.

Jede Aufgabe 4 Punkte.