Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Prof. Dr. Guido Kanschat

19. Juni 2013

Vorbemerkungen

Bei diesen Blättern handelt es sich zur Zeit nur um eine begleitende Ergänzung des Vorlesungsskriptes von Herrn Prof. Dr. Rannacher. Sie sind unvollständig und viele Teile fehlen noch.

Ich habe mich dennoch entschlossen, sie schon ins Netz zu stellen, damit hoffentlich einige Inkonsistenzen in der Notation aufgeklärt werden können.

Für Hinweise auf Fehler bin ich immer dankbar. Bitte achten Sie aber immer darauf, dass das Datum Ihrer Ausgabe mit dem Im Internet übereinstimmt.

Mein Dank gilt auch Herrn David Stronczek für seine Hilfe bei der Verfassung dieser Seiten.

Verzeichnis der Abkürzungen

AWA Anfangswertaufgabe, s. Definition 1.5 auf Seite 6

BDF Backward differencing formula, s. Beispiel 4.3 auf Seite 27

DGL Differentialgleichung

LMM Lineare Mehrschrittmethode, s. Definition 4.4 auf Seite 28

RKV Runge-Kutta-Verfahren

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 6

Randwertaufgaben

6.1 Ableitung der Lösung von AWA nach den Startwerten

Bemerkung 6.1. Im Sinne linearer Störungstheorie beschäftigt sich dieser Abschnitt mit der Ableitung der Lösung $u(t)$ der AWA (1.5), aber nicht nach dem Argument t, sondern nach den Startwerten. Deswegen werden wir jetzt die Lösung $u = u(t; s)$ der AWA

$$\begin{aligned} u'(t; s) = \tfrac{\partial}{\partial t} u(t; s) &= f\big(t, u(t; s)\big) \\ u(t_0; s) &= s0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

mit zwei Argumenten schreiben, nämlich der eigentlichen Zeitvariablen t und dem Startwert s.

Einen wesentlichen Beitrag zu dieser Analyse werden Lösungen der Variationsgleichung spielen, die wir hier definieren:

Definition 6.2. Die **Variationsgleichung** zur DGL (1.3) ist die lineare DGL

$$Y' = \nabla_u f\big(t, u(t)\big) Y \tag{6.2a}$$

für $d \times d$-Matrizen Y. Hierbei ist u eine Lösung der Gleichung (1.3) und $\nabla_u f(t, u)$ ist die Matrix der Ableitungen von f bezüglich der Komponentnen von u. Die Lösung von AWA zu dieser Gleichung mit

$$Y(t_0) = \mathbb{I} \tag{6.2b}$$

bezeichnen wir als Fundamentalmatrix und notieren $Y(t; t_0)$.

Anmerkung 6.3. Die Matrix Y in der obigen Definition lässt sich auch spaltenweise lesen. Dann ist jede Spalte eine vektorwertige Funktion $\varphi^{(i)}(t)$ und löst die AWA

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\varphi^{(i)}(t) &= \nabla_u f\big(t, u(t)\big)\varphi^{(i)}(t), \\ \varphi^{(i)}(t_0) &= e_i. \end{aligned}$$

Hilfssatz 6.4. *Für Fundamentalmatrizen zu beliebigen reellen Zahlen r, s, t gilt die Beziehung*

$$Y(r;t) = Y(t;s)Y(s;r). \tag{6.3}$$

Beweis. Dies folgt aus der Definition als Lösung von AWA und der Tatsache, dass sich die Lösungen linearer AWA linear kombinieren lassen. □

Bemerkung 6.5. Wenn die ursprüngliche DGL linear ist, also $f(t,u) = A(t)u$ mit einer $d \times d$-Matrix A, dann gilt $\nabla_u f(t,u) = A(t)$ und somit löst die Fundamentalmatrix ebenfalls die DGL

$$Y' = A(t)Y.$$

Satz 6.6 (Konditionierung der AWA)**.** *Sei $f(t,u)$ stetig in t und stetig differenzierbar in u. Dann gilt für die Ableitung $u(t;s)$ der Lösung der AWA* (6.1) *nach dem Startwert s die Beziehung*

$$\tfrac{\partial}{\partial s} u(t;s) = Y(t;t_0). \tag{6.4}$$

Beweis. □

6.2 Einleitung

Definition 6.7. Eine Randwertaufgabe (RWA) ist eine Differentialgleichungsaufgabe der Form: finde $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, so dass

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \qquad t \in (a,b) \tag{6.5a}$$

$$r\big(u(a), u(b)\big) = 0. \tag{6.5b}$$

Anmerkung 6.8. Die sehr allgemeine Randbedingung (6.5b) nimmt in der Regel einfachere Formen an. So ist sie oft **linear** und kann in der Form

$$B_a u(a) + B_b u(b) = g \tag{6.6}$$

mit $d \times d$-Matrizen B_a und B_b sowie einem Vektor $c \in \mathbb{R}^d$ notiert werden. Ebenfalls häufig finden wir den Fall **separierter** Randbedingungen der Form

$$r_a\big(u(a)\big) = 0, \qquad r_b\big(u(b)\big) = 0, \tag{6.7}$$

oder

$$B_a u(a) = g_a, \qquad B_b u(b) = g_b. \tag{6.8}$$

Bemerkung 6.9. Wie oben erwähnt, kann es eine befriedigende Lösungstheorie für RWA nur in speziellen Fällen geben. Deswegen wenden wir uns nun einer „eingeschränkten" Lösungstheorie zu. Die Fragestellung hier lautet: angenommen, eine Lösung des Problems kann gefunden werden, welche weiteren Bedingungen sind nötig, um zu einer Wohlgestelltheit des Problems im Sinne von Hadamard (Definition 1.22 auf Seite 9) zu kommen. Der Schlüssel ist die folgende Definition, die uns, zumindest nach einer Quantifizierung der Umgebung, die Möglichkeit der Approximation einer Lösung einräumt.

Definition 6.10. Eine Lösung $u(t)$ der RWA (6.5) heißt **lokal eindeutig** oder **isoliert**, wenn es keine zweite Lösung $v(t)$ der RWA gibt, die beliebig nah an $u(t)$ liegt. In Formelsprache: es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass gilt

$$\max_{t\in[a,b]} \|u(t) - v(t)\| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = v(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Hilfssatz 6.11. *Sei $f(t, u)$ stetig in t und stetig differenzierbar in u. Sei ferner $r(x, y)$ stetig differenzierbar und setze*[1]

$$B_a = \left.\frac{\partial r(x, y)}{\partial x}\right|_{x=u(a),y=u(b)}, \qquad B_b = \left.\frac{\partial r(x, y)}{\partial y}\right|_{x=u(a),y=u(b)}. \tag{6.9}$$

Sei $u(t)$ eine stetig differenzierbare Lösung der RWA (6.5). *Dann gilt für die Ableitung der Randbedingung $r(u(a), u(b))$ nach einem Funktionswert $u(t)$ im Inneren des Intervalls $[a, b]$*

$$E(t) := \frac{\partial r\big(u(a), u(b)\big)}{\partial u(t)} = B_a Y(a; t) + B_b Y(b; t). \tag{6.10}$$

Beweis. Wir betrachten die Lösung $u(\tau; s)$ der RWA zunächst als Lösung der AWA mit Startpunkt t

$$\frac{\partial}{\partial\tau} u(\tau; s) = f\big(\tau, u(\tau; s)\big), \qquad u(t) = s.$$

Dann gilt tautologisch $u(a; s) = u(a)$ und $u(b) = u(b; s)$, da wir wählen $s = u(t)$. Wir führen ja keine neue Funktion ein, sondern nur den neuen Parameter s, nach dem wir differenzieren wollen. Die Ableitung der Randbedingung läßt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned}\frac{\partial r\big(u(a), u(b)\big)}{\partial u(t)} &= \frac{dr\big(u(a; s), u(b; s)\big)}{ds} \\ &= B_a \frac{\partial u(a; s)}{\partial s} + B_b \frac{\partial u(b; s)}{\partial s} \\ &= B_a Y(a; t) + B_b Y(b; t).\end{aligned}$$

□

[1] Diese Definition ist konsistent mit der Verwendung der Matrizen B_a und B_b in Gleichung (6.6).

Satz 6.12. *(Lokale Eindeutigkeit) Ist unter den Voraussetzungen von Lemma 6.11 die Matrix $E(t)$ regulär für ein $t \in [a,b]$, so ist sie regulär für alle $t \in [a,b]$ und die Lösung $u(t)$ ist lokal eindeutig.*

Beweis. Sei zunächst $E(t)$ regulär. Dann gilt für $\tau \neq t$:

$$\begin{aligned} E(\tau) &= B_a Y(a;\tau) + B_b Y(b;\tau) \\ &= B_a Y(a;t) Y(t;\tau) + B_b Y(b;t) Y(t;\tau) = E(t) Y(t;\tau), \end{aligned}$$

wobei der erste Faktor nach Voraussetzung regulär ist, der zweite als Fundamentalmatrix einer linearen DGL. Für hinreichend kleine Störungen δu von $u(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t gilt dann für Störungen δr von $r\big(u(a), u(b)\big)$:

$$\delta r \approx \frac{\partial r\big(u(a), u(b)\big)}{\partial u(t)} \delta u = E(t) \delta u \neq 0.$$

Damit muss $u(t)$ also lokal eindeutig sein. □

Nachdem wir nun die lokale Eindeutigkeit der Lösung untersucht haben, bleibt noch die stetige Abhängigkeit von den Daten. Hier interessiert uns insbesondere in Analogie zum differenziellen Stabilitätssatz die Ableitung der Lösung zum Zeitpunkt t nach Störungen der Werte am Rand. Dazu haben wir:

Satz 6.13 (Konditionierung der RWA)**.** *Es gelten die Voraussetzungen von Hilfssatz 6.11 und $u(t)$ sei die Lösung der RWA* (6.5)*. Es gelte für diese Lösung $u(a) = x$ und $u(b) = y$. Dann gilt für Störungen der Randwerte x und y die Beziehung*

$$\frac{\partial u(t)}{\partial x} = E^{-1}(t) B_a, \qquad \frac{\partial u(t)}{\partial y} = E^{-1}(t) B_b, \tag{6.11}$$

Beweis. Wir führen den Beweis für die Ableitung nach dem linken Randwert, da die zweite Gleichung offensichtlich genauso gewonnen wird. Es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial u(t)}{\partial x} = \frac{\partial u(t)}{\partial r(x,y)} \frac{\partial r(x,y)}{\partial x}$$

Die zweite Ableitung ist nach (6.9) gerade B_a. Für die erste bemerken wir, dass $E(t)$ nach der Definition in Gleichung (6.10) gerade die Ableitung der Umkehrabbildung ist. Durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen erhalten wir damit das Resultat. □

Definition 6.14. Eine RWA (6.5) heißt linear, wenn sowohl die rechte Seite f als auch die Randbedingung linear in u ist. Sie hat die Form: finde $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, so dass

$$u'(t) = A(t) u(t) + f(t) \qquad \forall t \in (a,b) \tag{6.12a}$$

$$B_a u(a) + B_b u(b) = g. \tag{6.12b}$$

Korollar 6.15. *Die lineare RWA* (6.12) *besitzt genau dann eine eindeutige Lösung* $u(t)$ *für beliebige Daten* $f(t)$ *und* g*, wenn die* $d \times d$*-Matrix*

$$E(a) = B_a + B_b Y(b; a)$$

regulär ist.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass unter der Annahme an $E(a)$ eine Lösung $u(t)$, wenn sie existiert, lokal eindeutig ist. Damit ist sie aber auch global eindeutig, denn gäbe es eine zweite Lösung $v(t)$, so wären wegen der Linearität auch alle Linearkombinationen $w(t) = \vartheta u(t) + (1 - \vartheta)v(t)$ Lösungen, was für $\vartheta \to 0$ und $\vartheta \to 1$ der lokalen Eindeutigkeit widerspricht. □

6.3 Schießverfahren

Beispiel 6.16. Wir erläutern das Schießverfahren am einfachen, skalaren Beispiel

$$u'' = -g, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Was wir lösen können ist die AWA

$$u'' = -g, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = s.$$

Letztere hat eine eindeutige Lösung u(t;s) für jeden Startwert s. Nun ist es unsere Aufgabe, ein s^* zu finden, so das $u(1; s^*) = 0$. Mit anderen Worten, wir suchen eine Nullstelle der Funktion

$$F(s) = u(1; s).$$

Dies kann mit einem beliebigen, konvergenten Iterationsverfahren erreicht werden, z.B. dem Bisektionsverfahren. Besser wäre natürlich das Newtonverfahren, dafür müssen wir aber Ableitungen von F berechnen. Siehe dazu???

Definition 6.17. Das Einfachschießverfahren für die RWA (6.5) lautet wie folgt: finde einen Startvektor $s \in \mathbb{R}^d$, so dass die Lösung $u(t) = u(t; s)$ der AWA

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u(t; s) = f\big(t, u(t; s)\big), \qquad u(a; s) = s$$

die Randbedingungen (6.5b) erfüllt.

Anmerkung 6.18. Die Aufgabe des Schießverfahrens wird in der Regel mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst, das uns hilft, eine Nullstelle der Funktion

$$F(s) = r\big(s, u(b; s)\big) \tag{6.13}$$

zu finden. Für das Newtonverfahren benötigen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial s_i} F(s) = \partial_1 r\big(s, u(b; s)\big) + \partial_2 r\big(s, u(b; s)\big) \frac{\partial}{\partial s_i} u(b; s)$$

Für lineare und separierte Randbedingungen nimmt dies die wesentlich lesbarere Form

$$\frac{\partial}{\partial s_i}F(s) = B_a s + B_b \frac{\partial}{\partial s_i}u(b;s)$$

an. In beiden Fällen benötigen wir aber die Matrix $W(b)$ der Ableitungen der Lösung am Punkt b nach den Startwerten, die nach dem differentiellen Stabilitätssatz durch die Lösung der linearen AWA

$$W' = \nabla_u f\big(t, u(t;s)\big)W, \qquad W(t_0;s) = \mathbb{I}$$

gegeben ist.