IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **31.5.2013**

Programmierübung Nr. 4
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

Ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Stufe r mit Konsistenzordnungen p und $\hat{p}$ berechnet zwei Lösungen y und $\hat{y}$ mit denselben Funktionsauswertungen. Dazu werden zunächst Beiträge k_i für $i = 1, \dots, r$ wie in einem normalen ERK (expl. Runge-Kutta) der Stufe r berechnet. Die Funktionswerte am Ende des Zeitschritts ergeben sich dann als

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum c_i k_i \\ \hat{y}_{n+1} &= y_n + h \sum \hat{c}_i k_i. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Das Verfahren für y habe im folgenden Konsistenzordnung p und das für $\hat{y}$ die Konsistenzordnung $\hat{p} > p$, zum Beispiel $\hat{p} = p + 1$.

Das Butcher-Tableau (siehe Programmieraufgabe 3) für eingebettete Verfahren hat die Form

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ a_2 & b_{21} & & & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_s & b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{s,s-1} & \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_{s-1} & c_s \\ \hline & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \cdots & \hat{c}_{s-1} & \hat{c}_s \end{array}$$

(a) Implementieren Sie das Verfahren 4-ter/5-ter Ordnung von Dormand und Prince zu finden z.b. unter

`http://en.wikipedia.org/wiki/Dormand-Prince_method`

(b) Benutzen Sie es zur Lösung des Lotka-Volterra-Problems aus der ersten Programmieraufgabe.

(c) Plotten Sie (mit geeigneter Skalierung) die Funktionen $y(t)$, $\hat{y}(t)$ und die Schätzung $\hat{\tau}_n$ des Abschneidefehlers und diskutieren Sie.