IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **21.12.2012**

Übung Nr. 9
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 9.1: (Konvergenzraten iterativer Verfahren)

Schätzen Sie die Konvergenzordnung nach Definition 5.1 der folgenden Folgen:

i	a_i	b_i	c_i
1	0.375	2.63	0.973
2	0.211	2.56	0.934
3	6.67e-02	2.49	0.878
4	6.68e-03	2.42	0.801
5	6.70e-05	2.35	0.697
6	6.73e-09	2.29	0.566
7	6.79e-17	2.23	0.415
8	6.91e-33	2.17	0.259

Aufgabe 9.2: (Iterationsverfahren I) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Iteration

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) := x^{(k)} - \omega\left(Ax^{(k)} - b\right). \tag{9.1}$$

(a) Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt z von g das Gleichungssystem $Az = b$ löst.

(b) Finden Sie eine Bedingung an ω, so dass Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz und Eindeutigkeit von z und die Konvergenz des Verfahren für beliebige Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ folgern können. Messen Sie dazu die Lipschitz-Stetigkeit in der euklidischen Norm und nutzen Sie, was Sie über symmetrische Matrizen wissen.

(c) Zeigen Sie, dass es kein ω gibt, für das das Verfahren konvergiert, falls A symmetrisch und indefinit ist, also positive und negative Eigenwerte hat.

Aufgabe 9.3: (Iterationsverfahren II)

(a) Bestimmen Sie den Parameter im Verfahren (9.1) optimal, das heisst, so dass die Norm $\|I - \omega A\|_2$ minimal ist.

(b) Zeigen Sie, dass für diesen optimalen Parameter die Konvergenzabschätzung

$$\|x^{(k+1)} - z\|_2 \le \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\|x^{(k)} - z\|_2$$

mit der Spektralkondition $\kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ der Matrix A gilt.

Aufgabe 9.4: (Zusatzaufgabe: Iterationsverfahren III) Sei nun A eine normale Matrix.

(a) Seien λ_i die (komplexen) Eigenwerte von A. Skizzieren Sie für die exemplarischen Eigenwerte $\lambda = 7 \pm 2i$, $\lambda = \pm 4i$ und $\lambda = -1 \pm i$ den Graphen der Funktionen $f_i(\omega) = 1 - \omega\lambda_i$ für $\omega \in \mathbb{R}^+$.

(b) Zeigen Sie, dass Sie das Verfahren in Gleichung (9.1) durch Wahl von $\omega > 0$ genau dann zur Konvergenz bringen können, wenn alle Eigenwerte λ_i einen positiven Realteil haben.

(c) Zeichnen Sie in die Skizze aus (a) einen Einheitskreis. Was ist der Zusammenhang zwischen den beiden Aufgabenteilen?

Jede Aufgabe 4 Punkte.