IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **14.12.2012**

Übung Nr. 8
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 8.1: (Ausgleichsrechnung)

(a) Finden Sie das kubische Polynom $p(x)$, das die Summe $\sum_{i=1}^{5} |p(x_i) - y_i|^2$ minimiert, wobei

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	-1	2	0	1

(b) Plotten oder skizzieren Sie $p(x)$ und die Punkte (x_i, y_i).

Aufgabe 8.2: (Singulärwertzerlegung und Fast-Singularität)

Die Matrix A sei gegeben durch das Produkt

$$A = \frac{1}{1.0001} \begin{pmatrix} 1 & -10^{-2} \\ 10^{-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-2} & 1 \\ -1 & 10^{-2} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

(a) Verifizieren Sie, dass das Produkt in Gleichung (8.1) eine Singulärwertzerlegung ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix A und ihre Inverse. Lesen Sie aus der Gestalt von A die Eigenwerte ab.

(c) Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b_i$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.02 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 + \delta b,$$

und vergleichen Sie die relativen Fehler $\|\delta b\|_2$ und $\|\delta x\|_2$.

(d) Nutzen Sie die Idee der Pseudoinversen zur "Stabilisierung" des obigen Problems, indem Sie Singulärwerte $\sigma \leq 10^{-4}$ zu null setzen.

Aufgabe 8.3: (Newton-Verfahren I)

(a) Führen Sie das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^5 - 3$ mit dem Startwert $x = 3$ durch, um $\sqrt[5]{3}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-8} zu berechnen. Nutzen Sie die a posteriori Fehlerabschätzung aus Satz 5.1 zum Abbruch der Iteration.

(b) Ab welchem Schritt beobachten Sie quadratische Konvergenz?

Aufgabe 8.4: (Zusatzaufgabe: Normale Matrizen)

Per definitionem ist eine Matrix A normal, wenn gilt: $A^H A = AA^H$, wenn also A mit A^H kommutiert.

Zeigen Sie: Eine Matrix ist normal genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren gibt.

Hinweis: Benutzen Sie die Schursche Normalform von A und zeigen Sie, dass $S^H S = SS^H$. Schließen Sie aus der Darstellung der Diagonalelemente von $S^H S = SS^H$, dass S diagonal sein muss.

Jede Aufgabe 4 Punkte.