IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **30.11.2012**

Übung Nr. 6
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 6.1: (Spaltensummennorm)

Ergänzen Sie den fehlenden Teil des Beweises von Hilfssatz 4.2, nämlich dass die Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 := \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$$

die natürliche Norm zur Vektornorm $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ ist.

Aufgabe 6.2: (Berechnen der Inversen einer Tridiagonalmatrix)

Benutzen Sie Gauß-Elimination der Matrix

$$(T \mid I) = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

zur Berechnung der Matrix $(I|T^{-1})$ und damit der Inversen von T.

Aufgabe 6.3: (Eigenschaften der LR-Zerlegung)

Gegeben seien die $n \times n$-Matrizen

$$G_{i,k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & -q_{ik} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad G_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & -q_{k+1,k} & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -q_{nk} & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Elemente $-q_{ik}$ in der i-ten Zeile und k-ten Spalte stehen und alle nicht bezeicheten Einträge null sind.

(a) Zeigen Sie, dass die Zeilenoperation der Gauß-Elimination, also die Subtraktion des q_{ik}-fachen der Zeile k von der Zeile i in der Matrix A durch das Matrizenprodukt $G_{i,k}A$ beschrieben werden kann.

(b) Argumentieren Sie, dass die Inverse aus $G_{i,k}$ durch Vertauschung des Vorzeichens von q_{ik} hervorgeht.

(c) Nutzen Sie (a), um zu zeigen, dass $G_k = \prod_{i=k+1}^{n} G_{i,k}$.

(d) (für Unentwegte) Zeigen Sie, dass das Produkt $L = \prod_{k=1}^{n-1} G_k$ gleich der unteren Dreiecksmatrix aus der Vorlesung, also der Summe der strikten unteren Dreiecke von G_k und der Identität ist.

Aufgabe 6.4: (Zusatzaufgabe: Stetigkeit der Norm)

Es wird definiert, dass eine Folge $\{x^{(k)}\}$ in $\mathbb{R}^n$ gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: $x_i^{(k)} \to x_i$. Wir wollen nun Stetigkeit der Funktion $f(x) = \|x\|$ für eine beliebige Norm $\|.\|$ in mehreren Schritten zeigen:

(a) Zeigen Sie die "umgekehrte Dreiecksungleichung"

$$\|x - y\| \ge \Big| \|x\| - \|y\| \Big|.$$

(b) Zeigen Sie: $f(x)$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $f(x)$ stetig ist für $x = 0$.

(c) Zeigen Sie

$$f(x_k) \to 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i^{(k)} \to x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jede Aufgabe 4 Punkte.