

## Übung Nr. 5 zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

**Aufgabe 5.1: (Gauß-Quadratur)** Bestimmen Sie die Quadraturpunkte und -gewichte der Gauß-Formel mit 3 Stützpunkten für das Intervall  $[0, 1]$  ohne eine Formelsammlung zu benutzen.

### Aufgabe 5.2: (Gauß-Approximation I)

- (a) Benutzen Sie die Legendre-Polynome aus dem Skript, um die Gauß-Approximation  $p$  der Funktion  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  im Raum  $\mathcal{P}_2$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu berechnen.
- (b) Berechnen Sie die Fehler

$$\|f - p\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - p(x)|^2 dx} \quad \text{und} \quad \|f - p\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$$

- (c) Bestimmen Sie die Gauß-Approximation  $q$  der Funktion  $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$  im Raum  $\mathcal{P}_4$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .

### Aufgabe 5.3: (Orthogonale trigonometrische Funktionen)

- (a) Zeigen Sie, dass durch die  $2\pi$ -periodischen Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) &= \cos(nx) & n &= 0, 1, \dots \\ \varphi_{2n-1}(x) &= \sin(nx) & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ein Orthogonalsystem bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \varphi, \psi \rangle_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\psi(x) dx$$

gebildet wird. (Hilfe: Partielle Integration und Sätze aus der Trigonometrie über Vielfache von Argumenten)

- (b) Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\varphi_n$  für  $n \geq 1$  auch orthogonal sind bzgl. der Skalarprodukte

$$\langle \varphi, \psi \rangle_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\psi'(x) dx \quad \text{und} \quad \langle \varphi, \psi \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(x)\psi''(x) dx.$$

### Aufgabe 5.4: (Zusatzaufgabe: Gauß-Approximation II)

Gauß-Approximation im weiteren Sinne kann man für beliebige Skalarprodukte mit zugehöriger Norm  $\|\cdot\|_* = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_*}$  definieren. Häufig sucht man die Funktion, deren mittlerer Abstand in endlich vielen Messpunkten minimal ist. Das tun wir im Folgenden:

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der 3-Term-Rekursionsformel (siehe Skriptum und Aufgabe 4.3) die ersten 3 orthogonalen Polynome bezüglich des Skalarprodukts (auf  $\mathcal{P}_2$ )

$$\langle p, q \rangle_* = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (b) Berechnen Sie die Gauß-Approximierende  $\varphi$  der Funktion  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  im Raum  $\mathcal{P}_2$  bzgl. dieses Skalarprodukts.
- (c) Berechnen Sie den Fehler  $\|f - \varphi\|_*$ , und vergleichen Sie ihn mit dem Fehler  $\|f - p\|_*$  der Approximation der Aufgabe 5.2.