IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **9.11.2012**

Übung Nr. 3
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 3.1: (Stückweise polynomiale Funktionen) Sei $f \in C^1[a,b]$ und die Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gegeben. Es sei s_f die stückweise quadratische Interpolierende zu f mit $s_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$ und $s_f(x_{i-1/2}) = f(x_{i-1/2})$ für $i = 1, \dots, n$ und $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

(a) Wie ist die Darstellung von $s_f(x)$ auf dem Intervall $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$?

(b) Skizzieren Sie die Basispolynome vom Lagrange-Typ zur Interpolationsaufgabe auf zwei aufeinanderfolgenden Intervallen.

Aufgabe 3.2: (Orthogonale Polynome I) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_a^b p''(x) q''(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum

$$N = \{ p \in \mathcal{P}_n \big| p(a) = p(b) = 0 \}$$

definiert wird.

Aufgabe 3.3: (Konvergenz von Quadraturformeln) Sei eine Quadraturformel für ein Intervall I_h der Länge h exakt für Polynome der Ordnung n. Zeigen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_n(x)$ und des Restglieders, dass sich der Integrationsfehler durch

$$|I(f) - I^{(n)}(f)| = \mathcal{O}(h^{n+2})$$

abschätzen lässt, wobei die im $\mathcal{O}$ versteckte Konstante von $f^{(n+1)}$ abhängt.

Aufgabe 3.4: (Zusatzaufgabe: Quadratur durch Interpolation) Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ soll eine Quadraturformel durch quadratische Interpolation in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$ definiert werden. Berechnen Sie die Quadraturgewichte w_i.

Jede Aufgabe 4 Punkte.