IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **2.11.2012**

Übung Nr. 2
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 2.1: (Stabilität der Interpolation)

Zeigen Sie, daß das Negativbeispiel zur Lagrange-Interpolation aus der Vorlesung und Programmierübung der Fehlerabschätzung nicht widerspricht. Zur Interpolation wählen wir dazu die Punkte $x_i = -1 + 2i/n$ für $i = 0, \dots, n$ und n gerade. Nehmen Sie an, dass Sie eine Funktion f interpolieren, für die gilt: $f(0) = 1$ und $f(x_i) = 0$ für $x_i \neq 0$. Ferner nehmen Sie an, dass sämtliche Ableitungen von f in allen Interpolationspunkten verschwinden. Schätzen Sie mit einfachen Argumenten das Maximum der n-ten Ableitung von f durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes nach unten ab.

Aufgabe 2.2: (Neville-Schema)

(a) Benutzen Sie das Neville-Schema zur Berechnung der Temperatur in College Station, Texas (frei verfügbare deutsche Wetterdaten habe ich leider nicht gefunden), um 10 Uhr aus folgenden Daten (vom 24.10.2012):

Zeit	Temperatur
4h	20,0 C
6h	19,4 C
8h	19,4 C

(b) Nutzen Sie den weiteren Wert von 26,1 C um 12 Uhr zur Verbesserung der Approximation und kennzeichen Sie die zusätzlichen Rechnenschritte für diese Teilaufgabe.

(c) Vergleichen Sie die Approximation der gemessenen Temperatur von 22,2 C, die sich aus den Punkten 4h, 6h und 8h ergibt mit der aus den Punkten 6h, 8h und 12h (beide stehen in der vorletzten Spalte des Resultats von (b)). Was denken Sie, warum die zweite Approximation besser ist?

Aufgabe 2.3: (Fehler der Hermit-Interpolation)

Beweisen Sie analog zum Lagrangeschen Interpolationsfehler (Satz 2.3) die Fehlerabschätzung für die Hermite-Interpolation (Satz 2.5). Wenn es Ihnen die Arbeit erleichtert, nehmen Sie $\mu_i = 1$ für jedes i an.

Aufgabe 2.4: (Zusatzaufgabe)

(a) Eine Hermitische Interpolationsaufgabe sei definiert durch die 4 Bedingungen $I_k(p) = I_k(f)$ für $k = 0, 1, 2, 3$ mit

$$\begin{aligned} I_0(f) &:= f(0) & \qquad I_1(f) &:= f'(0) \\ I_2(f) &:= f(1) & \qquad I_3(f) &:= f'(1) \end{aligned}$$

Berechnen und skizzieren sie die 4 Basispolynome p_j, die die Bedingungen $I_k(p_j) = \delta_{jk}$ erfüllen.

(b) Geben Sie die Basispolynome zur Interpolationsaufgabe $I_k(p) = I_k(f)$ für $k = 0, \dots, n$ mit $I_k(f) = f^{(k)}(0)$ an.