IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **1.2.2013**

Übung Nr. 13
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 13.1: (Givens-Rotation)

Für Indizes $1 \leq i, j \leq n$ und den Winkel α wird die Rotation in der von $e_i$und e_j aufgespannten Ebene um den Winkel α durch die Matrix $G = G(i, j, \alpha)$ mit folgenden Einträgen beschrieben ($k \neq i, j$):

$$g_{ii} = g_{jj} = \cos\alpha, \quad g_{ij} = -\sin\alpha, \quad g_{ji} = \sin\alpha, \quad g_{kk} = 1.$$

Alle anderen Einträge sind null.

(a) Zeigen Sie, dass G orthogonal ist (denken oder rechnen!)

(b) Gegeben Sei ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ und sei $y = Gx$. Zeigen Sie, dass für die Wahl

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{|x_i^2| + |x_j|^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{-x_j}{\sqrt{|x_i^2| + |x_j|^2}} \tag{13.1}$$

gilt $y_j = 0$, dass also die Rotation mit G das Element mit Index j aus x eliminiert.

(c) Zeigen Sie, dass Sie durch sukkzessive Anwendung von Matrizen

$$G(n, n-1, \alpha_n)\, G(n-1, n-2, \alpha_{n-1}) \ldots G(k+1, k, \alpha_{k+1})$$

alle bis auf die ersten k Elemente aus einem Vektor x eliminieren können.

Aufgabe 13.2: (QR-Zerlegung und Hessenberg Form)

(a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Mittels geeigneter Givens-Rotationen $G(1, 2, \alpha_1)$, $G(2, 3, \alpha_2)$ und $G(3, 4, \alpha_3)$.

(b) Berechnen Sie das Produkt RQ und verifizieren Sie, dass es ebenfalls Hessenbergform hat.

Aufgabe 13.3: (Erinnerungsfragen)

(a) Wie lauten die Iterationsmatrizen fuer das Gauss-Seidel Verfahren und fuer das Jacobi Verfahren?

(b) Welchen Vorteil bietet die Wahl des Spektralradius gegenueber anderer vertraeglicher Matrizennormen zum Nachweis einer Kontraktion?

(c) Warum konnvergiert das CG-Verfahren spätestens nach n Schritten bei einer n x n-Matrix?

(d) Was ist die Grundidee (bei der Herleitung) des Gradientenverfahren?

Aufgabe 13.4: (Erinnerungsfragen)

(a) Wann wird das QR-Verfahren schlecht konvergieren?

(b) Wie reduziert man den Aufwand des QR-Verfahrens von $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen pro Schritt.

(c) Mit welchem Verfahren findet man den kleinsten Eigenwert einer symmetrisch, positiv definiten Matrix?

(d) Geben Sie 3 charakteristische Unterschide zwischen Singulärwertzerlegung und Jordanscher Normalform an.

Jede Aufgabe 4 Punkte.