IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **25.1.2013**

Übung Nr. 12
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 12.1: (Spektralradius und Norm)

(a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Matrixnorm $\|.\|$ gilt:

$$\operatorname{spr}(A) \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Spektralradius keine Norm ist.

Aufgabe 12.2: (Spektralradius und Konvergenz)

Wir betrachten die Modellmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{12.1}$$

(a) Stellen Sie für die Modellmatrix die Iterationsmatrizen J des Jacobi-Verfahrens auf und zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix J für $k = 1, \dots, n$ gegeben sind durch

$$\lambda_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

wobei der jeweils dazugehörige Eigenvektor die Gestalt

$$\omega_k = \left(\sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \sin\left(2\frac{\pi k}{n+1}\right), \dots, \sin\left(n\frac{\pi k}{n+1}\right)\right)^T$$

besitzt.

(b) Berechnen Sie anschließend den Spektralradius und betrachten Sie den Grenzwert $n \to \infty$. Was bedeutet das für das Konvergenzverhalten des Jacobi-Verfahrens für große Tridiagonalmatrizen der obigen Gestalt?

Aufgabe 12.3: (Potenzmethode nach von Mises)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die Gerschgorin-Kreise für diese Matrix.

(b) Ausgehend vom Startwert $x^0 = (0, 0, 1)^T$ berechnen Sie die ersten zwei Schritte der Potenzmethode zur Approximation des größten Eigenwert λ_{max}.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4: (Zusatzaufgabe: Rayleigh-Quotient) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Der Rayleigh-Quotient ist definiert als

$$r(x) := \frac{(Ax, x)_2}{\|x\|_2^2}.$$

(a) Zeigen Sie

$$\nabla r(x)\Big|_{x=\omega} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda = r(\omega)$$

(b) Seien $\lambda_{\text{min}} = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{\text{max}}$ die Eigenwerte und $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ die dazugehörigen Eigenvektoren. Zeigen Sie

$$\lambda_{\text{min}} = \min_{\|x\|_2=1} (Ax, x)$$
$$\lambda_{\text{max}} = \max_{\|x\|_2=1} (Ax, x)$$

Jede Aufgabe 4 Punkte.