IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **18.1.2013**

Übung Nr. 11
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 11.1: Zeigen Sie, dass die Folge der Suchrichtungen $p^{(k)}$ des cg-Verfahrens der Folge entspricht, die durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Folge $p^{(0)}, Ap^{(0)}, A^2p^{(0)}, \ldots$ entsteht.

Aufgabe 11.2:

(a) Leiten Sie eine 3-Term-Rekursionsformel für die Suchrichtungen $p^{(k)}$ des cg-Verfahrens her.

(b) Vergleichen Sie diese mit der 3-Term-Rekursion für orthogonale Polynome.

Aufgabe 11.3: Führen Sie 3 Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens für das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ durch.

Aufgabe 11.4: Zusatzaufgabe: Spektralradius und Kontraktion Für die Konvergenz einer Matrixiteration $x^{(k+1)} = Bx^{(k)}$ ist nach dem Kontraktionssatz hinreichend $\|B\| < 1$ für eine geeignete Matrixnorm. Notwendig und hinreichend ist $\mathrm{spr}(B) < 1$. In dieser Aufgabe soll aus der Jordanschen Normalform der Matrix B argumentiert werden, warum letzteres hinreichend ist, obwohl $\|B\| > 1$ sein kann. Der Hilfssatz 6.1 soll nicht verwendet werden.

(a) Beweisen Sie, dass die Matrixiteration mit dem Jordanblock

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

genau dann konvergiert, wenn $|\lambda_i| < 1$.

(b) Begründen Sie mit Ihrem Wissen über die Jordansche Normalform, warum das Argument für einen einzelnen Jordanblock ausreicht.

Jede Aufgabe 4 Punkte.