

## Übung Nr. 10 zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Beantworten Sie die folgenden Fragen in einem kurzen Satz.

### Aufgabe 10.1:

- (a) In einfachen Worten: Was ist die Bedeutung der Konditionierung einer numerischen Aufgabe für deren Lösung?
- (b) Was ist Auslöschung?
- (c) Wie hängt die Konditionierung der Aufgabe „Finde  $x$  so dass  $f(x) = 0$ “ von  $f'(x)$  ab? Argumentieren Sie graphisch!
- (d) Wie unterscheidet sich ein stabiler Algorithmus von einem instabilen?
- (e) Wie hängen Stabilität eines Algorithmus und Konditionierung einer Aufgabe zusammen?

### Aufgabe 10.2:

- (a) Worauf beruht die Eindeutigkeit der Lagrange-Interpolierenden? Geben Sie eine geometrische und eine algebraische Antwort.
- (b) Wie beweisen Sie Existenz der Lagrange-Interpolierenden konstruktiv?
- (c) Was ist der Hauptunterschied in der Konstruktion zwischen stückweiser Hermite-Interpolation und interpolierenden Splines?
- (d) Was ist der Hauptunterschied bei der Implementation?
- (e) Wo liegt das Grundproblem der globalen Interpolation mit einem Polynom? Warum zieht man stückweise Interpolation vor?

### Aufgabe 10.3:

- (a) Was ist das Konstruktionsprinzip interpolatorischer Quadraturformeln?
- (b) Welche Freiheitsgrade hat man beim Design einer solchen Formel?
- (c) Welche Ordnung kann eine  $n$ -Punkt-Formel maximal haben? Wie nennt man eine solche Formel?
- (d) Welche Ordnung haben Mittelpunkt-, Trapez- und Simpson-Regel?
- (e) Warum werden summierte Quadraturformeln benutzt?

### Aufgabe 10.4:

- (a) Was sind orthogonale Polynome?
- (b) Wie werden Sie konstruiert?
- (c) Was wissen Sie über die Stabilität des Gram-Schmidt-Verfahrens?
- (d) Geben Sie zwei Anwendungen für orthogonale Polynome an

### **Aufgabe 10.5:**

- (a) Was ist der Grundgedanke bei Produktzerlegungen der Form LR,  $LL^T$  und QR?
- (b) Was ist der Zusammenhang zwischen LR-Zerlegung und Gauß-Elimination?
- (c) Warum pivotisiert man?
- (d) Was ist der Zusammenhang zwischen Invertierbarkeit der Matrix und Pivotisierung?
- (e) Was ist der Zusammenhang zwischen Stabilität und Pivotisierung?
- (f) Wie verbessert sich die LR-Zerlegung bei Bandmatrizen? Vergleichen Sie mit der Berechnung der Inversen.

### **Aufgabe 10.6:**

- (a) Was ist eine Norm?
- (b) Was ist eine Matrixnorm?
- (c) Was ist eine verträgliche Matrixnorm und was ist eine Operatornorm oder natürliche Matrixnorm?
- (d) Was sind die Operatornormen zur euklidischen Norm sowie zur Betragssummennorm und zur Maximumsnorm?
- (e) Was wissen Sie über hermitesche/symmetrische Matrizen?
- (f) Wie hängt die positive Definitheit einer Matrix mit den Eigenwerten zusammen?
- (g) Warum löst man die Normalgleichungen nicht direkt?
- (h) Was können Sie an den Singulärwerten ablesen, nicht aber an den Eigenwerten, wenn die Matrix nicht normal ist?

### **Aufgabe 10.7:**

- (a) Was ist eine Kontraktion?
- (b) Welche Aussagen macht der Banachsche Fixpunktsatz über Fixpunkte?
- (c) Benötigt man Beschränktheit oder Kompaktheit der Menge, um mit ihm auf einen Fixpunkt zu schließen?
- (d) Was wissen wir über die Konvergenz des Newton-Verfahrens?
- (e) Was ist ein Abstiegsverfahren?