IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **26.10.2012**

Übung Nr. 1
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 1.1: Maschinenzahlen und das Assoziativgesetz

Sie haben einen Computer mit Dezimaldarstellung und einer Mantissenlänge von 3 Stellen, das heißt, jede Zahl hat die Form $0.m_1m_2m_3 \cdot 10^a$. Berechnen Sie die Gleitkommaoperationen

$$0.001 \oplus \big(\mathrm{rd}(\pi) \ominus \mathrm{rd}(\pi)\big) \quad \text{und} \quad \big(0.001 \oplus \mathrm{rd}(\pi)\big) \ominus \mathrm{rd}(\pi)$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler in beiden Fällen.

Aufgabe 1.2: Diskretisierungsfehler

Die Ableitung $f'(x)$ kann durch die Diffrenzenquotienten

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad D_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

approximiert werden. Benutzen Sie Taylorentwicklung unter der Annahme, dass $f \in C^\infty(]x-2h, x+2h[)$, um eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers von der Form

$$|f'(x) - d_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad |f'(x) - D_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

zu erhalten. Bestimmen Sie in beiden Fällen den höchsten Koeffizienten α.

Aufgabe 1.3: Abbruchfehler

Das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle x einer stetigen Funktion funktioniert wie folgt: sei $I_0 = [a_0, b_0]$ ein Intervall so dass $f(a_0)f(b_0) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz liegt dann eine Nullstelle in I_0. Sei $p_0 = (a_0 + b_0)/2$ der Intervallmittelpunkt. Falls $f(p_0) = 0$, dann haben wir die Nullstelle gefunden. Falls nicht, dann ist entweder $f(a_0)f(p_0) < 0$ oder $f(p_0)f(b_0) < 0$. Im ersten Fall wählen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = p_0$, im zweiten $a_1 = p_0$ und $b_1 = b_0$. Wir wiederholen die Prozedur mit $I_1 = [a_1, b_1]$, und so fort.

(a) Führen Sie 3 Schritte des Verfahrens (Berechnung von p_2) für $f(x) = x^2 - 2$ und das Startintervall $[1, 2]$ durch. Skizzieren Sie die Funktionm und die berechneten Intervalle I_k.

(b) Geben Sie eine obere Schranke für den Abbruchfehler ohne Kenntnis der exakten Lösung an. Schreiben Sie eine Fehlerabschätzung mithilfe der Landauschen Symbole, also $|p_n - x| = \mathcal{O}(...)$.

Aufgabe 1.4: Bonusaufgabe: Konditionierung und Rundungsfehler

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = x^3 \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

(a) Man bestimme die Konditionszahl der Funktionsauswertung. Für welche Argumente x ist die Funktion gut, für welche schlecht konditioniert?

(b) Man werte $f(x)$ für $x = 1.4 \cdot 10^2$ bei vierstelliger Arithmetik (im Dezimalsystem) nach dem folgenden Verfahren aus:

$$\begin{aligned}
&a_1 = x^2 \\
&a_2 = a_1 - 1 \\
&a_3 = x/a_2 \\
&a_4 = 1/x \\
&a_5 = a_3 - a_4 \\
&a = x^3 a_5
\end{aligned}$$

(c) Man schlage einen "stabileres" Verfahren zur Auswertung von $f(x)$ vor und wiederhole die Rechnung in der vorherigen Teilaufgabe. Man bestimme wieder absoluten sowie relativen Fehler.

Jede Aufgabe 4 Punkte.