IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **Verlängert bis 18.01.2013**

Programmierübung Nr. 9
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

In dieser Woche geht es um das mehrdimensionale Newton-Verfahren:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(J(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

wobei $J(x) = \nabla f(x)$ die Gradientenmatrix (auch Jacobi-Matrix genannt) von f mit Einträgen $j_{il} = \partial f_i/\partial x_l$ bezeichnet.

Bestimmen Sie mit dieser Methode eine Nullstellle $x^\star$ des Gleichungssystems

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - \cos(x_2x_3) \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin(x_3) \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.06 \\ -\frac{10\pi-3}{3} \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie dazu folgende Aufgaben:

(a) Berechnen Sie per Hand die Jacobi-Matrix $J(x)$ der obigen Funktionen und implementieren Sie diese und die Funktion als Octave-Funktionen `f(x)` und `J(x)`, so dass die Argumente und Rückgabewerte dreidimensionale Vektoren bzw. 3×3-Matrizen sind.

(b) Implementieren Sie das Newton-Verfahren in der Form

$$J(x^{(k)})v^{(k)} = f(x^{(k)}) \tag{9.1}$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - v^{(k)}. \tag{9.2}$$

Führen Sie die Iteration beginnend mit dem Startwert $(5,5,5)^T$ durch und brechen Sie ab, sobald zwei aufeianderfolgende Iterationen - in einer Vektornorm Ihrer Wahl - einen Abstand kleiner 10^{-8} besitzen. Geben Sie anschließend eine dreispaltige Tabelle der berechneten Werte aus und visualisieren Sie die Fehlerentwicklung in einem logarithmischen Plot.

(c) Untersuchen Sie das Verfahren auf dieselbe Art wie im hervorgehenden Punkt für die folgenden Modifikationen:

- **Aufwandsreduktion**: Werten Sie, beginnend mit dem Startwert, die Matrix J nur in jedem 5-ten Schritt für die jeweils aktuelle Iterierte $x^{(k)}$ aus. Das lineare Gleichungssystem in Gleichung (9.1) soll für die Iterationen vor der Neuberechnung von J mit der alten Matrix gelöst werden.
- **Dämpfung**: Ändern Sie den Korrekturschritt in Gleichung (9.2) wie folgt ab

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda v^{(k)}.$$

Wählen Sie dabei $\lambda = 0.33$.

- **Zusatzaufgabe: Schrittweitensteuerung**: Wählen Sie unterschiedliche λ_k:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k v^{(k)}.$$

Um ein geeignetes λ_k zu bestimmen führen Sie folgende “innere” Iteration in jedem Newtonschritt k durch:

$\lambda_{k,0} = 1$ und $i = 0$.
while $\|f(x^{(k)} - \lambda_{k,i}v^{(k)})\| > \|f(x^{(k)})\|$ **do**
    $\lambda_{k,i+1} = \lambda_{k,i}/2$
    $i = i + 1$
end while

Vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche Modifikation ist die Beste? Versuchen Sie mit Hilfe der Theorie zu begründen warum das urspüngliche Verfahren auf die eine oder andere Art modifiziert wird!