IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **7.12.2012**

Programmierübung Nr. 6
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Gegeben ist eine “Blockmatrix” der folgenden Gestalt:

$$A_n = \begin{bmatrix} B_m & -I_m & & \\ -I_m & B_m & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I_m \\ & & -I_m & B_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad B_m = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

wobei $n = m^2$ und I_m die m-dimensionale Einheitsmatrix ist. Des weiteren haben wir den Vektor $f_n = (1, 1, \dots, 1)^T$ aus dem $\mathbb{R}^n$ vorliegen.

(a) Lösen eines LGS über die LR-Zerlegung:

(i) Erstellen Sie eine Funktion, die die LR-Zerlegung der obigen Bandmatrix für gegebenes m bestimmt.

(ii) Mittels der obigen LR-Zerlegung soll nun die Lösung x des Gleichungssystems

$$A_n x = f_n$$

bestimmt werden. Verwenden Sie dazu die Technik des Vorwärts- und Rückwärtseinsetzens

$$Ly = f$$
$$Rx = y.$$

(b) Lösen eines LGS über die Berechnung der Inversen:

(i) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A für gegebenes m durch die Technik der simultanen Elimination (siehe Scriptum).

(ii) Mit Hilfe der Inversen berechnen Sie abermals den Lösungsvektor

$$x = A_n^{-1} f_n.$$

(c) Vergleichen Sie für $m = 5, 10, 15, 20$ die beiden Techniken: Bestimmen Sie den zeitlichen Aufwand der beiden Methoden (a) und (b) mit den Octave-Befehlen `tic` und `toc`. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle über alle m dar und visualisieren Sie anschließend die beiden Zeitreihen in einem logarithmischen Plot.

(z) Zusatzaufgabe: Nutzen Sie die Bandstruktur der Matrix in Aufgabenteil (a) und (b) aus. Dazu programmieren Sie eine Funktion, die neben der Matrix A auch die Bandbreite als Übergabeparameter erhält (`LRBand(band,A)`). Führen Sie die obigen Aufgaben für die modifizierte LR-Zerlegung aus.