IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **9.11.2012**

Programmierübung Nr. 4
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

(a) Implementieren Sie eine Funktion, die für eine gegebene Funktion f das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mit Hilfe der summierten Trapezregel mit n Teilintervallen berechnet.

(b) Benutzen Sie diese Funktion zur Integration von $\sin(x)$ auf $[0,\pi]$ mit $n = 2, 4, 8, 16, 32$ und verifizieren Sie die Konvergenzordnung aus der Vorlesung.

(c) Implementieren Sie die Romberg-Quadratur (Richardson-Extrapolation) für diese Folge. Schreiben Sie dazu eine Funktion, die für den Parameter N die Funktion aus (a) für die Intervallzahlen $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^N$ aufruft und die Diagonalelemente des Schemas ausgibt.

(d) Berechnen Sie die a posteriori Fehlerabschätzung

$$\eta_h = \left| \frac{I_{h/2}(f) - I_h(f)}{1 - 2^3} \right|$$

und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.

(e) Integrieren Sie auf demselben Intervall $[0,\pi]$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

Welche Konvergenzordnung erhalten Sie? Warum ist die Genauigkeit wesentlich geringer?

(f) (Zusatzaufgabe für Neugierige) Implementieren Sie ein Verfahren, das die a posteriori Fehlerabschätzung auf den Teilintervallen benutzt, um gezielt Intervalle zu halbieren, auf denen der Fehler groß ist.