IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **01.02.2013**

Programmierübung Nr. 12
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -10 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & 14 & 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 & 23 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & 32 & 10 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 41 \end{pmatrix}.$$

12.1 (Spektralzahl spr(A) und Konditionszahl cond$_2(A)$)

(a) Berechnen Sie den Spektralradius spr(A) der Matrix mit Hilfe der Potenzmethode auf eine Genauigkeit von 10^{-12}.
Hinweis: Dazu benötigen Sie die exakten Werte der Eigenwerte, die Sie durch den Octave-Befehl `eig(A)` erhalten.

(b) Benutzen Sie die Inverse Iteration nach Wieland um ausgehend vom Startwert $x^0 = \frac{(1,1,1,1,1,1)^T}{\|(1,1,1,1,1,1)\|_2}$ und der a priori Schätzung $\tilde{\lambda} = 0$ den kleinsten Eigenwert λ_{min} auf eine Genauigkeit von 10^{-12} zu berechnen.

(c) Beschleunigen Sie die Konvergenz indem Sie im k-ten Schritt die aktuelle Approximation des kleinsten Eigenwerts als neue a priori Schätzung $\tilde{\lambda}$ setzen.

(d) Berechnen Sie jetzt die Konditionszahl cond$_2(A)$.

12.2 (Vollständiges Eigenwert-Problem mit QR-Zerlegung)

(a) Programmieren Sie einen Algorithmus der folgende zwei Schritte durchführt:

1. Erstellen der QR-Zerlegung der Ausgangsmatrix: $A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$
2. Bilden des folgenden Matrixprodukts: $A^{(k+1)} = {Q^{(k)}}^T A^{(k)} Q^{(k)}$

Hinweis: Sie dürfen die Octave-interne QR-Zerlegung verwenden `[Q,R]=qr(A)`.

(b) Benutzen Sie den Algorithmus aus (a) um das vollständige Eigenwertproblem auf eine Genauigkeit von 10^{-12} zu lösen.
Dazu speichern Sie die Hauptdiagonaleinträge der Matrix $A^{(k)}$ als Vektor $\lambda^{(k)}$ ab. Nachdem Sie diesen Vektor gegebenfalls mit dem Octave-Befehl `sort(x)` der Größe nach sortiert haben, vergleichen Sie Ihn mit dem Vektor $\lambda^{\star}$, den Sie erhalten wenn Sie den Octave-Befehl `eig` für die Eigenwertberechung verwenden.
Für den Vergleich verwenden Sie bitte die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, damit Sie gewährleisten können, das jeder Eigenwert auf 10^{-12} genau berechnet wurde.
Wieviele Iterationen haben Sie schlussendlich für die Berechnung der Eigenwerte gebraucht?