

Programmierübung Nr. 11 zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

In dieser Aufgabe wollen wir ein lineares Gleichungssystem, wie es typischerweise bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen auftritt mit dem cg-Verfahren lösen. Es ist dazu nicht nötig, den mathematischen Hintergrund der Differentialgleichung oder des Diskretisierungsverfahrens zu verstehen, da wir uns nur mit dem Teilaspekt der linearen Algebra beschäftigen.

Die Matrix unseres Gleichungssystems und ihre Herkunft werden im Abschnitt 6.3 des Skriptums „Ein Modellproblem“ beschrieben. Wir haben sie auch schon in der Programmierübung 6 kennengelernt. Ein wesentliches Strukturmerkmal der Matrix, das auf eine weite Klasse ähnlicher Aufgaben zutrifft, ist, dass die Matrix zwar groß ist, dass aber die Anzahl der von null verschiedenen Elemente in jeder Zeile klein ist, hier 5 oder weniger. Solche Matrizen heißen „dünn besetzt“, oder auf englisch *sparse*. Zur Verwaltung dünn besetzter Matrizen benutzen Sie in Matlab und Octave den Befehl

`sparse(A)`

- (a) Speichern Sie die Blockmatrix A des Modellproblems als dünn besetzte Matrix, wobei Sie 10×10 Gitterpunkte verwenden.
- (b) Implementieren Sie das cg-Verfahren.
- (c) Lösen Sie das System $A\hat{x} = b$ mit der rechten Seite $b = (1, \dots, 1)^T$.
- (d) Speichern Sie Ihren Lösungsvektor in Schritten von 10 Einträgen Spaltenweise als Matrix ab:

$$X = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_{11} & \cdots & \hat{x}_{91} \\ \hat{x}_2 & \hat{x}_{12} & & \hat{x}_{92} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{x}_{10} & \hat{x}_{20} & \cdots & \hat{x}_{100} \end{pmatrix}$$

Plotten Sie die Matrix mit dem Befehl `mesh(X)`. Der Plot repräsentiert die Lösung als Funktion von x und y .

- (e) **Zusatzaufgabe:** Experimentieren Sie mit der Anzahl der Gitterpunkte und Schließen Sie aus der Anzahl der cg-Schritte, wie die Kondition der Matrix von der Gitterweite abhängt.