IWR – Universität Heidelberg
Prof. Dr. Guido Kanschat

Abgabe: **8. Februar 2013**

Klausur Nr. 1
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2012/13

Aufgabe 1.1: je 1 Punkt, 10 Punkte insgesamt

Zur Antwort gehört in der Regel eine kurze (!) Begründung.

(a) Gilt das Assoziativgesetz für die Gleitkommaaddition?

(b) Geben Sie das interpolierende Polynom der Funktion $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ in den Punkten $x_0 = -2$, $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ an!

(c) Wo liegt der Vorteil von Bandmatrizen bei der Implementation der LR-Zerlegung?

(d) Kubische Splines und stückweise hermitesche Interpolation benutzen beide kubische Polynome auf den Teilintervallen. Geben Sie für beide Methoden eine Eigenschaft an, die die andere nicht hat (ohne Begründung).

(e) Wie sind die Quadraturpunkte der Gauß-Formeln gewählt?

(f) Konvergiert das Newton-Verfahren für jeden Startwert?

(g) Definieren Sie eine Operatornorm einer Matrix!

(h) Warum konvergiert das cg-Verfahren in Schritt $k = n$, wobei n die Raumdimension ist?

(i) Hängt die Konvergenzrate einer linearen Fixpunktiteration vom Abstand des Startwerts von der Lösung ab?

(j) Geben Sie das Intervall an, in dem die Eigenwerte der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

liegen!

Aufgabe 1.2: 2 Punkte

Schätzen Sie die Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens, das in den Schritten $k = 1, \dots, 5$ die folgenden Fehler produziert:

Schritt k	1	2	3	4	5
Fehler e_k	0,1	0,0273	0,00203	$1,13 \cdot 10^{-5}$	$3,49 \cdot 10^{-10}$

Aufgabe 1.3: 2 Punkte

Approximieren Sie das Integral

$$\int_1^3 \ln x \, dx$$

(a) Mit der Simpsonregel

(b) Mit der zusammengesetzten Trapezregel auf zwei gleich großen Teilintervallen.

Aufgabe 1.4: 4 Punkte

Bestimmen Sie die Quadraturpunkte und -gewichte der Gaußformel mit zwei Punkten auf dem Intervall $[1, 3]$. Führen Sie dazu alle notwendigen Schritte durch und transformieren Sie nicht die bekannte Formel.

Aufgabe 1.5: 4 Punkte

(a) Finden Sie das lineare Polynom $p(x)$, das die Summe $\sum_{i=1}^{4} |p(x_i) - y_i|^2$ minimiert, wobei

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	2	0	1

(b) Skizzieren Sie $p(x)$ und die Punkte (x_i, y_i).

Aufgabe 1.6: 4 Punkte

(a) Führen Sie 3 Schritte des Newton-Verfahrens zum Finden einer Nullstelle z der Funktion $f(x) = x^3 + 2$ mit dem Startwert $x_0 = -1$ durch.

(b) Leiten Sie aus $f(x_3)$ eine Abschätzung für den Fehler $|x_3 - z|$ her.

Aufgabe 1.7: 4 Punkte

Auf dem Raum P_2 sei durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)q(x_i), \quad x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

ein Skalarprodukt definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle p, q \rangle$ in der Tat ein Skalarprodukt ist.

(b) Finden Sie eine Orthogonalbasis $\{\varphi_i\}_{i=0,1,2}$ von P_2 bezüglich $\langle p, q \rangle$, so dass jeweils $\varphi_i \in P_i$ ist.